

Całki nieoznaczone

Definicja całki nieoznaczonej:

Całką nieoznaczoną funkcji $f(x)$, oznaczaną symbolem $\int f(x)dx$, nazywamy wyrażenie $F(x) + C$, gdzie $F(x)$ jest funkcją pierwotną funkcji $f(x)$, a C jest dowolną stałą:

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \quad \text{gdzie } F'(x) = f(x), \quad C \in \mathbb{R}.$$

Własności całek nieoznaczonych:

1. $\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$
2. $\int (c f(x))dx = c \int f(x)dx, \quad c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
3. $\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$ (wzór na całkowanie przez części)
4. $\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du, \quad \text{gdzie } g(x) = u$ (wzór na całkowanie przez podstawienie)

Całki nieoznaczone ważniejszych funkcji elementarnych:

1. $\int 1 dx = x + C$
2. $\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C, \quad a \neq -1, x > 0$
3. $\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x} + C, \quad x > 0$
4. $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C, \quad x \neq 0$
5. $\int e^x dx = e^x + C$
6. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad a \in \mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$
7. $\int \sin x dx = -\cos x + C$
8. $\int \cos x dx = \sin x + C$
9. $\int \operatorname{tg} x dx = -\ln|\cos x| + C, \quad x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$
10. $\int \operatorname{ctg} x dx = \ln|\sin x| + C, \quad x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$
11. $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C, \quad x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$
12. $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C, \quad x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$
13. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C = -\arccos x + C_1, \quad x \in (-1; 1)$
14. $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{arctg} x + C = -\operatorname{arcctg} x + C_1$
15. $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + C, \quad f(x) \neq 0$
16. $\int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}} dx = 2\sqrt{f(x)} + C, \quad f(x) > 0$

Algorytm całkowania funkcji wymiernych:

Jeżeli $P(x)$ i $Q(x)$ są dowolnymi wielomianami ($Q(x) \neq 0$), to całkę $\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$ nazywamy całką z funkcji wymiernej. Algorytm obliczania całki z funkcji wymiernej:

1. Sprawdzamy, czy licznik funkcji wymiernej jest pochodną mianownika przemnożoną przez dowolną stałą ($P(x) = a \cdot Q'(x)$), jeśli tak, całkę funkcji wymiernej obliczamy ze wzoru:

$$\int \frac{a \cdot Q'(x)}{Q(x)} dx = a \cdot \int \frac{Q'(x)}{Q(x)} dx = a \cdot \ln |Q(x)| + C, \quad \text{gdzie } a \in \mathbb{R};$$

w przeciwnym wypadku:

2. Jeżeli stopień wielomianu $P(x)$ jest większy lub równy stopniowi wielomianu $Q(x)$, dzielimy z resztą wielomian $P(x)$ przez $Q(x)$ i wyrażenie $\frac{P(x)}{Q(x)}$ (ułamek niewłaściwy) zapisujemy jako sumę nowego wielomianu (wyniku dzielenia), z którego całkę można już łatwo policzyć i ułamka właściwego (którego stopień licznika jest mniejszy od stopnia mianownika);
3. Mianownik ułamka właściwego rozkładamy na czynniki liniowe lub nierozkładalne kwadratowe w pewnych potęgach;
4. Ułamek właściwy rozkładamy na sumę ułamków prostych *pierwszego rodzaju* $\frac{A}{(x+a)^n}$ i *drugiego rodzaju* $\frac{Bx+C}{(x^2+bx+c)^k}$;

Przykład:

$$\frac{5x-2}{(x+3)^3(x^2+2x+2)^2} = \frac{A}{(x+3)^3} + \frac{B}{(x+3)^2} + \frac{C}{x+3} + \frac{Dx+E}{(x^2+2x+2)^2} + \frac{Fx+G}{x^2+2x+2}$$

5. Szukamy współczynników rozkładu ułamka właściwego na ułamki proste;
6. Obliczamy całki poszczególnych składników rozkładu:

- a) ułamki proste pierwszego rodzaju całkujemy przez podstawienie i otrzymujemy:

$$\int \frac{A}{x+a} dx = A \ln |x+a| + C$$

$$\int \frac{A}{(x+a)^n} dx = -\frac{A}{(n-1)(x+a)^{n-1}} + C, \quad \text{gdzie } n \geq 2$$

- b) ułamki proste drugiego rodzaju obliczamy stosując wzór:

$$\int \frac{Bx+C}{(x^2+bx+c)^n} dx = \frac{B}{2} \int \frac{2x+b}{(x^2+bx+c)^n} dx + \left(C - \frac{Bb}{2}\right) \int \frac{1}{(x^2+bx+c)^n} dx$$

Pierwszą z tych całek obliczamy stosując podstawienie $t = x^2 + bx + c$, drugą natomiast przekształcając trójmian $x^2 + bx + c$ do postaci kanonicznej, stosując podstawienie $t = x + \frac{b}{2}$ i korzystając wielokrotnie ze wzoru rekurencyjnego:

$$\int \frac{1}{(x^2+a^2)^n} dx = \frac{x}{2(n-1)a^2(x^2+a^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2(n-1)a^2} \int \frac{1}{(x^2+a^2)^{n-1}} dx$$

gdzie $a^2 > 0$ i $n \geq 2$ oraz ze wzoru

$$\int \frac{1}{x^2+a^2} dx = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C.$$

Ważniejsze podstawienia stosowane podczas liczenia całek nieoznaczonych:

Na potrzeby tego opracowania założmy, że $\mathcal{R}(u, v)$ jest funkcją wymierną dwóch zmiennych.

1. Całkę niewymierną postaci $\int \mathcal{R} \left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}} \right) dx$, gdzie $ad - bc \neq 0$ obliczamy stosując podstawienie:

$$t^n = \frac{ax+b}{cx+d}$$

$$\text{wówczas: } x = \frac{b - dt^n}{ct^n - a} \quad \text{oraz} \quad dx = \frac{n(ad - bc)t^{n-1}}{(ct^n - a)^2} dt.$$

2. Całkę niewymierną postaci $\int \mathcal{R} \left(x, \sqrt{ax^2 + bx + c} \right) dx$ gdzie $a \neq 0$ i $b^2 - 4ac \neq 0$ obliczamy stosując jedno z trzech podstawień, zwanych podstawieniami Eulera:

- I. gdy $a > 0$ stosujemy *pierwsze podstawienie Eulera* postaci:

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = (t - x)\sqrt{a}$$

$$\text{wówczas: } x = \frac{at^2 - c}{b + 2at} \quad \text{oraz} \quad dx = \frac{2a^2t^2 + 2abt + 2ac}{(b + 2at)^2} dt;$$

- II. gdy $c > 0$ możemy zastosować *drugie podstawienie Eulera* postaci:

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = xt - \sqrt{c}$$

$$\text{wówczas: } x = \frac{b + 2t\sqrt{c}}{t^2 - a} \quad \text{oraz} \quad dx = \frac{-2(t^2\sqrt{c} + bt + a\sqrt{c})}{(t^2 - a)^2} dt;$$

- III. gdy $b^2 - 4ac > 0$ ($\Delta > 0$) możemy zastosować *trzecie podstawienie Eulera* postaci:

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{a(x - x_1)(x - x_2)} = (x - x_1)t$$

$$\text{wówczas: } x = \frac{x_1t^2 - ax_2}{t^2 - a} \quad \text{oraz} \quad dx = \frac{2at(x_2 - x_1)}{(t^2 - a)^2} dt.$$

W praktyce, każdą całkę postaci $\int \mathcal{R} \left(x, \sqrt{ax^2 + bx + c} \right) dx$ gdzie $a \neq 0$ i $b^2 - 4ac \neq 0$ można policzyć stosując I lub III podstawienie Eulera.

3. Całkę trygonometryczną postaci $\int \mathcal{R}(\sin x, \cos x) dx$, w zależności od warunków jakie spełnia funkcja \mathcal{R} obliczamy stosując jedno z podstawień:

a) gdy $\mathcal{R}(-u, v) = -\mathcal{R}(u, v)$, wówczas: $t = \cos x$, $\sin x = \sqrt{1 - t^2}$, $dx = \frac{-1}{\sqrt{1 - t^2}} dt$;

b) gdy $\mathcal{R}(u, -v) = -\mathcal{R}(u, v)$, wówczas: $t = \sin x$, $\cos x = \sqrt{1 - t^2}$, $dx = \frac{1}{\sqrt{1 - t^2}} dt$;

c) gdy $\mathcal{R}(-u, -v) = \mathcal{R}(u, v)$, wówczas: $t = \operatorname{tg} x$, $\sin x = \frac{t}{\sqrt{1 + t^2}}$, $\cos x = \frac{1}{\sqrt{1 + t^2}}$,
 $dx = \frac{1}{1 + t^2} dt$;

d) podstawienie uniwersalne: $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$, $\sin x = \frac{2t}{1 + t^2}$, $\cos x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$, $dx = \frac{2}{1 + t^2} dt$.

Metoda współczynników nieoznaczonych:

Jeśli W_n jest wielomianem stopnia n , zaś $ax^2 + bx + c$ jest trójmianem takim, że $a \neq 0$ i $b^2 - 4ac \neq 0$, to istnieje wielomian W_{n-1} stopnia $n - 1$ oraz stała $A \in \mathbb{R}$ taka, że:

$$\int \frac{W_n(x)}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx = W_{n-1}(x)\sqrt{ax^2 + bx + c} + A \int \frac{1}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx.$$

Całki nieoznaczone ważniejszych funkcji:

17.
$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} dx = \ln \left| x + \sqrt{x^2-1} \right| + C, \quad x \in (-\infty; 1) \cup (1; \infty)$$

18.
$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = \ln \left(x + \sqrt{x^2+1} \right) + C$$

19.
$$\int \frac{1}{(x-a)^2+b} dx = \frac{1}{\sqrt{b}} \operatorname{arctg} \frac{x-a}{\sqrt{b}} + C, \quad b > 0$$

20.
$$\int \frac{1}{\sin x} dx = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{1}{2}x \right| + C, \quad x \neq k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

21.
$$\int \frac{1}{\cos x} dx = \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}x \right) \right| + C, \quad x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

22.
$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}} dx = \ln \left| x + \sqrt{x^2+a} \right| + C$$

23.
$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+ax+b}} dx = \ln \left| x + \frac{1}{2}a + \sqrt{x^2+ax+b} \right| + C$$

24.
$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{|a|} + C, \quad a \neq 0$$

25.
$$\int \sqrt{a^2-x^2} dx = \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{|a|} + \frac{x}{2} \sqrt{a^2-x^2} + C, \quad a \neq 0$$

26.
$$\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}} dx = \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{|a|} - \frac{x}{2} \sqrt{a^2-x^2} + C, \quad a \neq 0$$

27.
$$\int \sqrt{x^2+a} dx = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2+a} + \frac{1}{2}a \cdot \ln \left| x + \sqrt{x^2+a} \right| + C$$

28.
$$\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2+a}} dx = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2+a} - \frac{1}{2}a \cdot \ln \left| x + \sqrt{x^2+a} \right| + C$$

29.
$$\int \sin^n x dx = -\frac{1}{n} \sin^{n-1} x \cos x + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} x dx, \quad n \geq 2$$

30.
$$\int \cos^n x dx = \frac{1}{n} \cos^{n-1} x \sin x + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} x dx, \quad n \geq 2$$

31.
$$\int \operatorname{tg}^n x dx = \frac{1}{n-1} \operatorname{tg}^{n-1} x - \int \operatorname{tg}^{n-2} x dx, \quad n \geq 2$$

32.
$$\int \operatorname{ctg}^n x dx = \frac{-1}{n-1} \operatorname{ctg}^{n-1} x - \int \operatorname{ctg}^{n-2} x dx, \quad n \geq 2$$

Inne wzory pomocne podczas liczenia całek:

1.
$$\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}, \quad x \in (0; \infty), \quad m \in \mathbb{N}_+, \quad n \in \mathbb{N}_+ \setminus \{1\}$$

2.
$$\frac{1}{x^n} = x^{-n}, \quad x \neq 0$$

3.
$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

4.
$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

5.
$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

6.
$$\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}, \quad x \neq k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

7.
$$\sin ax \cos bx = \frac{1}{2} \left(\sin(a+b)x + \sin(a-b)x \right)$$

8.
$$\sin ax \sin bx = \frac{1}{2} \left(\cos(a-b)x - \cos(a+b)x \right)$$

9.
$$\cos ax \cos bx = \frac{1}{2} \left(\cos(a+b)x + \cos(a-b)x \right)$$