Pochodne

Definicja pochodnej:

Pochodną funkcji $y = f(x)$ w punkcie x nazywamy granicę, do której dąży stosunek przyrostu funkcji Δy do odpowiedniego przyrostu zmiennej niezależnej Δx, gdy przyrost zmiennej niezależnej dąży do zera:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Własności pochodnych:

1. $\big(c \cdot f(x)\big)' = c \cdot f'(x), \quad c \in \mathbb{R}$
2. $\big(f(x) \pm g(x)\big)' = f'(x) \pm g'(x)$
3. $\big(f(x) \cdot g(x)\big)' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
4. $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{\big(g(x)\big)^2}, \ g(x) \neq 0$
5. $\Big(f\big(g(x)\big)\Big)' = f'\big(g(x)\big) \cdot g'(x)$

Pochodne ważniejszych funkcji elementarnych:

1. $(c)' = 0, \quad c \in \mathbb{R}$
2. $(x^a)' = a \cdot x^{a-1}, \quad x > 0, \ a \in \mathbb{R}$
3. $(x)' = 1$
4. $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad x > 0$
5. $\left(\frac{a}{x}\right)' = -\frac{a}{x^2}, \quad x \neq 0$
6. $(\sin x)' = \cos x$
7. $(\cos x)' = -\sin x$
8. $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x, \quad x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \ k \in \mathbb{Z}$
9. $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x} = -(1 + \operatorname{ctg}^2 x), \quad x \neq k\pi, \ k \in \mathbb{Z}$
10. $(e^x)' = e^x$
11. $(a^x)' = a^x \cdot \ln a, \quad a \in \mathbb{R}_+$
12. $(\ln |x|)' = \frac{1}{x}, \quad x \neq 0$
13. $(\log_a |x|)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}, \quad a \in \mathbb{R}_+ \setminus \{1\}, \ x \neq 0$
14. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in (-1;1)$
15. $(\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in (-1;1)$
16. $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$
17. $(\operatorname{arcctg} x)' = \frac{-1}{1+x^2}$

Inne wzory pomocne podczas liczenia pochodnych:

1. $\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}, \quad x \in \langle 0; \infty), \ m \in \mathbb{N}_+, \ n \in \mathbb{N}_+ \setminus \{1\}$
2. $\frac{1}{x^n} = x^{-n}, \quad x \neq 0$